

Екінші ретті көп айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (ДТДТ) үшін Коши есебі мен сипаттауыштар әдісі — теңдеулердің шешімдерін табудағы негізгі аналитикалық тәсілдердің бірі. Төменде осы екі ұғымды түсіндірейін.

1. Жалпы екінші ретті ДТДТ

Көп айнымалы функция үшін екінші ретті теңдеудің жалпы түрі:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x),$$

мұндағы $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Матрица түрінде:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad A = A^T.$$

2. Теңдеу типін анықтау

Теңдеудің типі A матрицасының негізгі минорларының таңбаларына немесе оның меншікті мәндеріне (λ_i) байланысты анықталады:

Типі	Шарт	Мысалы
Эллипстік	Барлық λ_i бірдей таңбалы	$\Delta u = 0$
Гиперболалық	Бір λ_i өзгеше таңбалы	Толқын теңдеуі
Параболалық	Бір $\lambda_i = 0$, басқалары бірдей таңбалы	Жылу теңдеуі

3. Коши есебі

Коши есебі (бастапқы шарт есебі) — бұл теңдеудің шешімін белгілі бір бетте (гипербеттің бойында) берілген бастапқы деректер арқылы анықтау есебі.

Мысалы:

Гиперболалық теңдеу үшін:

$$a_{ij}u_{x_i x_j} + \dots = 0$$

және бастапқы шарттар:

$$u|_{\Sigma} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \psi(x),$$

мұндағы Σ — x -тұрақты бет (мысалы, $t = 0$).

Мақсат:

Берілген $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ арқылы $u(x)$ шешімін табу.

4. Сипаттауыштар (характеристикалар) әдісі

Сипаттауыштар әдісі — Коши есебін шешудің негізгі құралы, әсіресе **гиперболалық теңдеулер** үшін.

Екінші ретті ДТДТ үшін сипаттауыш беттердің теңдеуі:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0$$

мұндағы $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$ — **сипаттауыш бет**.

Бұл теңдеу — көп айнымалы **Коши теңдеуі** деп аталады.

Интерпретациясы

- Сипаттауыш беттер бойында теңдеудің шешімінің туындылары үздіксіз болмай қалуы мүмкін (мысалы, толқын фронттары).
- Физикалық тұрғыда сипаттауыштар — ақпарат, толқын немесе әсер тарайтын беттер.

5. Қысқаша мысал (үш айнымалы үшін)

Мысалы:

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz} + 2du_{xy} + 2eu_{xz} + 2fu_{yz} = 0.$$

Сипаттауыш беттердің теңдеуі:

$$a(dx)^2 + b(dy)^2 + c(dz)^2 + 2d\,dx\,dy + 2e\,dx\,dz + 2f\,dy\,dz = 0.$$

Бұл теңдеу dx, dy, dz арасындағы байланыс арқылы сипаттауыш беттерді береді.

6. Қорытынды

Элемент	Мағынасы
Коши есебі	Бастапқы беттегі шарттар арқылы шешімді табу
Сипаттауыштар	Теңдеудің қасиетін анықтайтын беттер
Физикалық мәні	Толқынның таралу бағытын, ақпараттың қозғалысын сипаттайды

Екінші ретті көп айнымалы теңдеулер үшін Гурса есебі — бұл Коши есебінің ерекше түрі, негізінен гиперболалық типтегі теңдеулер үшін қарастырылады. Гурса есебі көбіне үш айнымалы (мысалы, x, y, z) функциялар үшін қойылады және физикалық тұрғыда толқындардың таралуын сипаттайды.

■ 1. Жалпы түрі

Үш айнымалы үшін екінші ретті сызықтық біртекті теңдеу:

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz} + 2du_{xy} + 2eu_{xz} + 2fu_{yz} = 0,$$

мұндағы a, b, c, d, e, f — берілген функциялар немесе тұрақтылар.

Теңдеудің типі $A = (a_{ij})$ матрицасының қасиеттеріне қарай анықталады:

- Егер бір меншікті мәnnің таңбасы өзгеше болса → **гиперболалық теңдеу**.

Гурса есебі көбіне осындай **гиперболалық теңдеулерге** қойылады.

■ 2. Гурса есебінің мәні

Гурса есебі — бұл екінші ретті гиперболалық теңдеу үшін шешімін екі қиылысатын сипаттауыш беттерде берілген бастапқы шарттар арқылы табу есебі.

■ 3. Мысал (классикалық форма)

Қарапайым мысал:

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

осы теңдеу үшін Гурса есебі:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(0, y) = \psi(y), \end{cases}$$

және бастапқы шарттар қиылысу нүктесінде сәйкес келеді:

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

■ 4. Геометриялық мағынасы

- Бұл есептің бастапқы шарттары $x = 0$ және $y = 0$ сызықтары (яғни сипаттауыштар) бойында беріледі.
 - Яғни шешімнің мәні екі сипаттауыш сызықта белгілі, және сол арқылы бүкіл жазықтықта анықталады.
-

5. Гурса есебі үшін шешімнің бар болуы мен бірегейлігі

Шешім бар және бірегей болуы үшін:

1. Бастапқы шарттар сипаттауыш беттерде берілуі тиіс;
2. Берілген функциялар (F, φ, ψ) үздіксіз және жеткілікті түрде тегіс болуы қажет;
3. Шарттардың қиылысу нүктесіндегі сәйкестік шарты орындалуы керек:
 $\varphi(0) = \psi(0)$.

6. Физикалық мағынасы

Гурса есебі физикада:

- Толқындар мен тербелістердің таралуын,
- Дыбыс пен жарықтың қозғалысын,
- Электромагниттік өрістердің дамуын сипаттайтын модельдерде кездеседі.

7. Көп айнымалы жағдай (үш және одан көп айнымалы)

Мысалы, үш айнымалыдағы гиперболалық теңдеу:

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0.$$

Гурса есебі үшін бастапқы деректер екі сипаттауыш бетте (мысалы, $t - x = c_1$ және $t + x = c_2$) беріледі:

$$u|_{\Sigma_1} = \varphi_1, \quad u|_{\Sigma_2} = \varphi_2.$$

Сол арқылы бүкіл кеңістікте $u(x, y, t)$ анықталады.

8. Қорытынды

Элемент	Мағынасы
Гурса есебі	Гиперболалық теңдеудің шешімін екі сипаттауыш беттегі бастапқы шарттар арқылы табу есебі
Бастапқы шарттар	Екі қиылысатын сипаттауыштар бойында беріледі
Шешімнің барлығы	Үздіксіздік және сәйкестік шарттарына байланысты
Физикалық мәні	Толқындардың, әсердің немесе ақпараттың сипаттауыш беттер бойымен таралуын көрсетеді

■ 2. Жалпы түрі

Қарапайым жағдайда (екі айнымалы үшін):

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

болсын.

Гурса есебі келесідей қойылады:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(0, y) = \psi(y), \end{cases}$$

және қиылысу нүктесінде шарттың сәйкестігі орындалады:

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

Мұндағы:

- $u(x, y)$ — белгісіз функция,
 - $\varphi(x), \psi(y)$ — берілген бастапқы функциялар.
-

■ 3. Геометриялық түсіндірме

- $x = 0$ және $y = 0$ түзулері — сипаттауыш сызықтар (characteristics).
- Бұл екі сипаттауыш сызық қиылысқанда, сол аймақтың ішінде шешім ізделеді.
- Шешімнің мәні екі сипаттауыш бойындағы бастапқы деректермен толық анықталады.

■ 4. Дербес шешім (мысал)

Ең қарапайым жағдайда:

$$u_{xy} = 0.$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі:

$$u(x, y) = f(x) + g(y),$$

мұнда f және g — еркін функциялар.

Бастапқы шарттарды қоямыз:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = f(x) + g(0),$$

$$u(0, y) = \psi(y) = f(0) + g(y).$$

Осыдан:

$$f(x) = \varphi(x) - g(0),$$

$$g(y) = \psi(y) - f(0).$$

Бірақ қиылысу нүктесінде $\varphi(0) = \psi(0)$ болғандықтан, $f(0) = \varphi(0) - g(0)$, сондықтан:

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0).$$

✓ Бұл — Гурса есебінің дербес шешімі:

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0).$$

5. Көп айнымалы жағдай

Егер теңдеу үш айнымалыға тәуелді болса (мысалы):

$$u_{xy} - u_{zt} = 0,$$

онда Гурса есебі екі сипаттауыш бетте беріледі:

$$u|_{\Sigma_1} = \varphi_1, \quad u|_{\Sigma_2} = \varphi_2.$$

Шешімнің мәні осы екі сипаттауыш беттердің қиылысу аймағында анықталады.

6. Физикалық мағынасы

- Гурса есебі көбінесе **толқындардың таралуын** сипаттайтын модельдерде қолданылады.
- Мысалы, дыбыс немесе электромагниттік толқын белгілі бір бағыттарда қозғалғанда, сипаттауыш беттер толқын фронттарын білдіреді.

7. Қорытынды кесте

Элемент	Мағынасы
Гурса есебі	Екінші ретті гиперболалық теңдеудің шешімін екі сипаттауыш беттегі шарттар арқылы табу есебі
Типтік теңдеу	$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$
Бастапқы шарттар	$u(x, 0) = \varphi(x), u(0, y) = \psi(y), \varphi(0) = \psi(0)$
Дербес шешім (мысал)	$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$
Қолданылуы	Толқындар, сигналдар, ақпараттың сипаттауыш бойымен таралуын сипаттайды